模块三 椭圆与方程

第 1 节 椭圆的定义、标准方程及简单几何性质（★★）

强化训练

1.（★★）椭圆 $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的右顶点为 $A(1,0)$，过其焦点且垂直于长轴的弦长为 1，则椭圆的方程为_____.

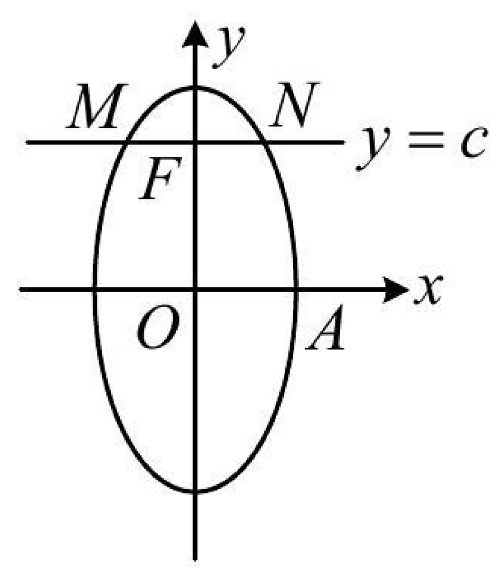
答案：$\frac{y^2}{4}+x^2=1$

解析：椭圆的焦点在 y 轴上，椭圆的右顶点为 $A(1,0)\Rightarrow b=1$，

椭圆的过焦点且垂直于长轴的弦是通径，可联立通径所在直线和椭圆的方程来求通径长，

如图，设 $F(0,c)$ 是椭圆的上焦点，联立 $\begin{cases} y=c \\ \frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1 \end{cases}$ 消去 y 可得 $x^2=b^2(1-\frac{c^2}{a^2})=b^2\cdot\frac{a^2-c^2}{a^2}=\frac{b^4}{a^2}$，

所以 $x=\pm\frac{b^2}{a}$，故通径长 $|MN|=\frac{2b^2}{a}$，由题意，$\frac{2b^2}{a}=1$，所以 $a=2b^2=2$，故椭圆的方程为 $\frac{y^2}{4}+x^2=1$.



2.（2023•湖南模拟•★★）椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{3}=1(a>\sqrt{3})$ 的左、右焦点分别为 F_1，F_2，A 为上顶点，若 ΔAF_1F_2 的面积为 $\sqrt{3}$，则 ΔAF_1F_2 的周长为（　）

（A）8　（B）7　（C）6　（D）5

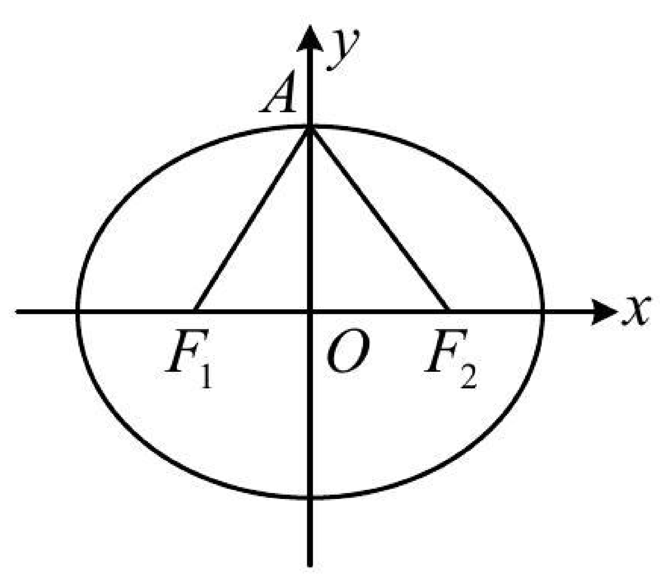
答案：C

解析：涉及 ΔAF_1F_2 的面积，先画图来看面积怎么算，如图，可用 F_1F_2 为底，OA 为高来算，

$S_{\Delta AF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|OA|=\frac{1}{2}\times 2c\times b=bc=\sqrt{3}$ ①，我们发现 b 已知，故可求得 c，再由 a，b，c 关系求 a，

由题意，$b=\sqrt{3}$，代入①得：$c=1$，所以 $a=\sqrt{b^2+c^2}=2$，

故 ΔAF_1F_2 的周长 $L=|AF_1|+|AF_2|+|F_1F_2|=2a+2c=6$.



3．（2023·安徽蚌埠三模·★★）若椭圆$C:\frac{x^2}{m}+\frac{y^2}{2}=1$的离心率为$\frac{\sqrt{6}}{3}$，则椭圆$C$的长轴长为（　　）

（A）6　　（B）$\frac{2\sqrt{6}}{3}$或$2\sqrt{6}$　　（C）$2\sqrt{6}$　　（D）$2\sqrt{2}$或$2\sqrt{6}$

答案：D

解析：椭圆的焦点在哪个坐标轴不确定，故需讨论，

当椭圆C的焦点在x轴上时，$m>2$，且$a=\sqrt{m}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\sqrt{m-2}$，离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{m-2}}{\sqrt{m}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

解得：$m=6$，满足$m>2$，所以椭圆C的长轴长$2a=2\sqrt{6}$；

当椭圆C的焦点在y轴上时，$0<m<2$，且$a=\sqrt{2}$，$b=\sqrt{m}$，$c=\sqrt{2-m}$，离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2-m}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$，

解得：$m=\frac{2}{3}$，满足$0<m<2$，椭圆C的长轴长$2a=2\sqrt{2}$.

4．（2022·河北衡水中学六调·★★）阿基米德（公元前287年至公元前212年）不仅是著名的物理学家，也是著名的数学家，他利用“逼近法”得到椭圆的面积除以圆周率等于椭圆的长半轴长与短半轴长的乘积. 若椭圆C的对称轴为坐标轴，焦点在y轴上，离心率为$\frac{\sqrt{7}}{4}$，面积为12π，则椭圆C的方程为（　　）

（A）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$　　（B）$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1$　　（C）$\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{32}=1$　　（D）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{36}=1$

答案：A

解析：结合题干信息，把面积和离心率翻译成关于a，b的方程，求解即可，

由题意，设椭圆C的面积为S，则$\frac{S}{\pi}=ab$，所以$S=\pi ab=12\pi$，故$ab=12$ ①，

椭圆C的离心率$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{\sqrt{7}}{4}$ ②，

联立①②解得：$a=4$，$b=3$，结合椭圆C的焦点在y轴上可得其方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$.

5．（★★）已知ΔABC的周长是8，且$B(-1,0)$，$C(1,0)$，则顶点A的轨迹方程是（　　）

（A）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1(x\neq\pm3)$　　（B）$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1(x\neq0)$　　（C）$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1(y\neq0)$　　（D）$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{3}=1(y\neq0)$

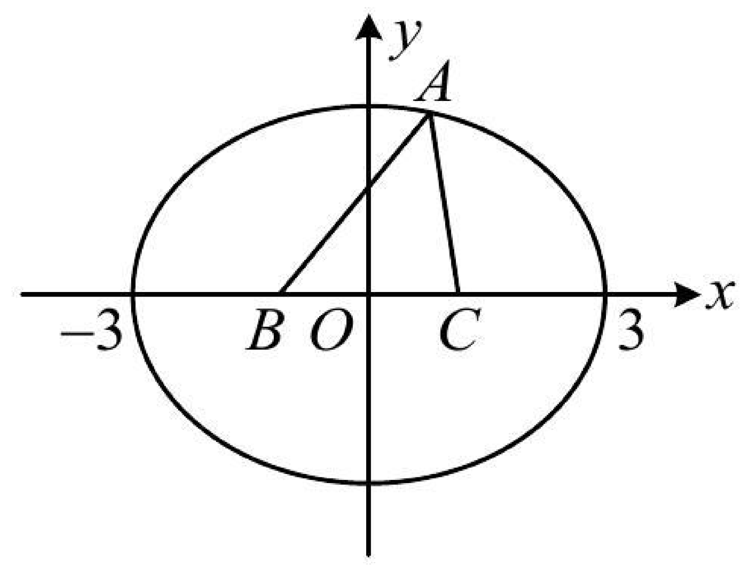
答案：A

解析：因为ΔABC的周长为8，所以$|AB|+|AC|+|BC|=|AB|+|AC|+2=8$，故$|AB|+|AC|=6>|BC|$ ①，

点A到定点B，C的距离之和等于定长，所以点A的轨迹是以B，C为焦点的椭圆，

由①知$2a=6$，所以$a=3$，又由焦点B，C的坐标知$c=1$，所以$b^2=a^2-c^2=8$，

故椭圆的方程为$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{8}=1$，如图，$A$，$B$，$C$要构成三角形，所以点$A$不能在$x$轴上，故$x\neq\pm3$，选A.

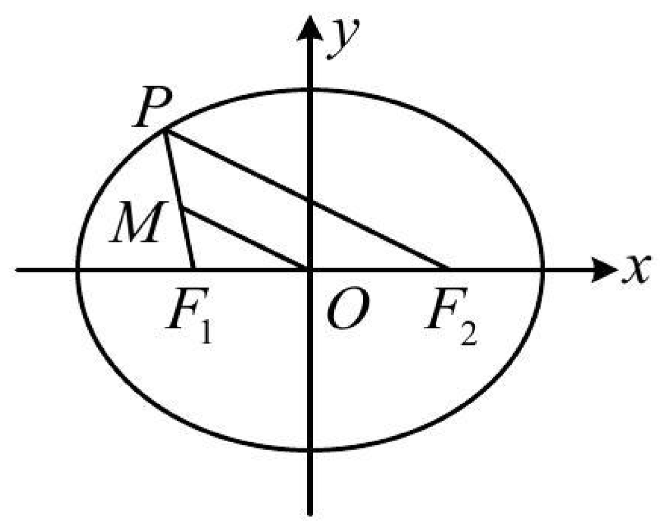


6．（★★）已知 F_1，F_2 是椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ 的左、右焦点，P 为椭圆上一点，M 为 F_1P 中点，$|OM|=3$，则 $|PF_1|=$______.

答案：4

解析：涉及中点，可考虑中位线，如图，M 为 PF_1 中点，O 是 F_1F_2 中点，所以 $|PF_2|=2|OM|=6$，

已知 $|PF_2|$ 求 $|PF_1|$，用椭圆定义即可，由题意，$a=5$，所以 $|PF_1|+|PF_2|=2a=10$，故 $|PF_1|=10-|PF_2|=4$.



【反思】椭圆隐藏的三个中点：O 是 F_1F_2、长轴、短轴的中点.

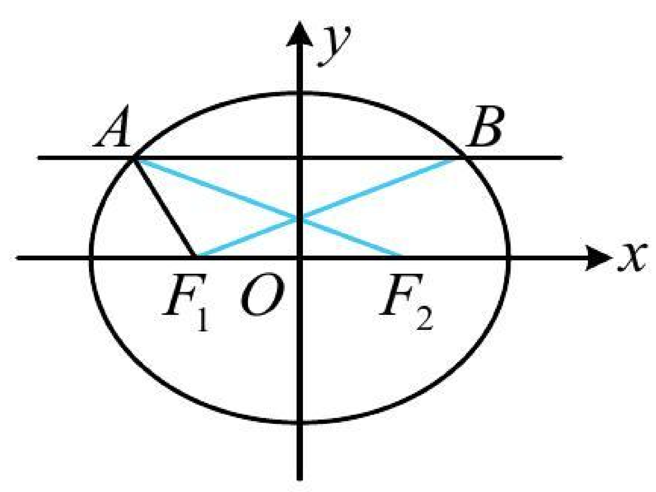
7．（2023·四川模拟·★★★）已知椭圆 $C:\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 的两个焦点分别为 F_1，F_2，一条平行于 x 轴的直线 l 与椭圆 C 交于 A，B 两点，则 $|AF_1|+|BF_1|=$（　　）

（A）4　（B）3　（C）2　（D）$2\sqrt{7}$

答案：A

解析：如图，涉及椭圆上的 A，B 两点到焦点的距离，考虑用椭圆定义，但没法用定义直接算 $|AF_1|+|BF_1|$，观察图形发现可考虑用对称性来转化，

由题意，长半轴长 $a=2$，由图形的对称性，$|BF_1|=|AF_2|$，所以 $|AF_1|+|BF_1|=|AF_1|+|AF_2|=2a=4$.



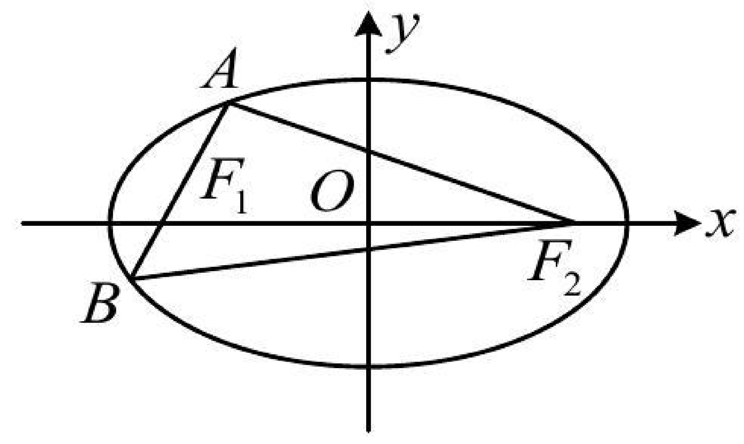
8．（★★★）已知 F_1，F_2 为椭圆 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$ 的两个焦点，过 F_1 的直线交椭圆于 A，B 两点，若 $|AF_2|+|BF_2|=12$，则 $|AB|=$______.

答案：8

解析：椭圆上的点到焦点的距离问题都可优先考虑椭圆定义，

由题意，$a=5$，因为 A，B 在椭圆上，所以$\begin{cases}|AF_1|+|AF_2|=10\\|BF_1|+|BF_2|=10\end{cases}$，题干有$|AF_2|+|BF_2|$，所以把两式相加，

故$|AF_1|+|BF_1|+|AF_2|+|BF_2|=20$ ①，由图可知$|AF_1|+|BF_1|=|AB|$，代入①得：$|AB|+|AF_2|+|BF_2|=20$，又$|AF_2|+|BF_2|=12$，所以$|AB|=20-(|AF_2|+|BF_2|)=8$.



9.（★★★）设椭圆$C:\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$的左、右焦点分别为$F_1$，$F_2$，$A(1,1)$，$P$ 为椭圆 C 上的动点，则$|PA|+|PF_1|$的最大值为_____.

答案：5

解析：如图，直接观察 P 在何处时取得最值不易，可用椭圆定义将$|PF_1|$转化为$|PF_2|$再看，

由题意，$|PF_1|+|PF_2|=4$，所以$|PF_1|=4-|PF_2|$，故$|PA|+|PF_1|=|PA|+(4-|PF_2|)=|PA|-|PF_2|+4$ ①，

由三角形两边之差小于第三边知$|PA|-|PF_2|\le|AF_2|$，结合①可得：$|PA|+|PF_1|\le|AF_2|+4$ ②，

当且仅当点 P 位于图中 P_0 处时取等号，因为 $A(1,1)$，$F_2(1,0)$，所以$|AF_2|=1$，

代入②得：$|PA|+|PF_1|\le5$，故$|PA|+|PF_1|$的最大值为 5.